Beata Leska

Zespół Szkół im. M. Konarskiego w Warszawie

O liczbach i wielomianach Bernoulliego

O LICZBACH I WIELOMIANACH BERNOULLIEGO

Za twórcę liczb i wielomianów Bernouuliego uważa się powszechnie Jakuba Bernoulliego (1654 - 1705). Do historii matematyki wpisał się on jako jeden z ośmiu uczonych o tym samym nazwisku. Największe zasługi Jakub Bernoulli położył w teorii rachunku różniczkowego oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Badając sumy postaci:

$$1^m+2^m+3^m+...+n^m \quad ,n,m\in N_+$$

wyznaczył liczby, które dziś zwane są liczbami Bernoulliego ([5],str.92-94). Z wyliczeniem tych liczb związane było również określenie wielomianów, które J. L. Raabe w 1851 roku nazwał „wielomianami Bernoulliego". Należy zaznaczyć, że sam Bernoulli zajmował się jedynie wielomianami określonymi na zbiorze liczb naturalnych. Dla dowolnej zmiennej rzeczywistej wielomiany Bernoulliego jako pierwszy rozważał L. Euler. Rezultaty swojej pracy na temat liczb i wielomianów Jakub Bernoulli zebrał w książce „Ars Conjectandi' opublikowanej pośmiertnie w 1713 roku ([6],str. 272).

LICZBY BERNOULLIEGO

Rozpatrzmy funkcję

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}, \qquad x\in R-\{0\}$$

Zauważmy, że

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)-1}=\frac{x}{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+...+\frac{x^n}{(n+1)!}+...}$$

Powyższa równość zachodzi dla $x\neq 0$. W punkcie x=0 wyrażenie

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+...+\frac{x^n}{(n+1)!}+...} \qquad (1)$$

ma wartość 1, a ułamek $\frac{x}{e^x-1}$ ma granicę równą 1.

Iloraz (1) daje się przedstawić w postaci szeregu $\sum_0^\infty c_n x^n$ na mocy twierdzenia:

TWIERDZENIE: *„Jeżeli szeregi* $\sum_0^\infty a_n x^n$ *oraz* $\sum_0^\infty b_n x^n$ *mają dodatnie promienie zbieżności i szereg* $\sum_0^\infty b_n x^n$ *w punkcie x=0 jest różny od zera, to istnieje szereg* $\sum_0^\infty c_n x^n$ o dodatnim promieniu zbieżności taki, że w pewnym otoczeniu punktu x=0 zachodzi tożsamość:

$$\sum_0^\infty a_n x^n \equiv \left(\sum_0^\infty b_n x^n\right)\left(\sum_0^\infty c_n x^n\right)$$

Ze względów historycznych oznaczymy współczynniki $c_n = \frac{B_n}{n!}$.

Otrzymujemy wówczas:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \ldots} = \sum_0^\infty \frac{B_n}{n!} x^n .$$

Skąd

$$\left(\sum_0^\infty \frac{B_n}{n!} x^n\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \ldots\right) \equiv 1,$$

a ponadto wobec definicji iloczynu Couchy'ego dwóch szeregów ([4].str.157) mamy

$$\frac{B_0}{0!} + x\left(\frac{B_1}{1!} + \frac{B_0}{0!2!}\right) + x^2\left(\frac{B_2}{2!1!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_0}{0!3!}\right) + \ldots + x^n\left(\frac{B_n}{n!1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \ldots + \frac{B_1}{1!n!} + \frac{B_0}{0!(n+1)!}\right) + \ldots = 1$$

Na mocy twierdzenia o identyczności szeregów ([3],str.184) otrzymujemy, że $B_0 = 1$, a także następujący układ równań

$$\frac{B_n}{n!1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \ldots + \frac{B_2}{2!(n-1)!} + \frac{B_1}{1!n!} + \frac{B_0}{0!(n+1)!} = 0, \qquad \text{dla n=1,2,3,...}$$

Pomnóżmy obie strony powyższych równań przez (n+1)!. Otrzymujemy wówczas:

$$\frac{(n+1)!}{n!1!} B_n + \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} B_{n-1} + \ldots + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} B_2 + \frac{(n+1)!}{1!n!} B_1 + 1 = 0, \qquad \text{dla n=1,2,3,...} \quad (2)$$

Zauważmy, że współczynniki przy kolejnych B_n mają postać symbolu Newtona. W związku z tym układ równań (2) wygląda następująco

$$\binom{n+1}{1} B_n + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + \ldots + \binom{n+1}{n-1} B_2 + \binom{n+1}{n} B_1 + 1 = 0, \qquad \text{dla n=1,2,3...} \quad (3)$$

Łatwo udowodnić metodą indukcji zupełnej, że układ (3) jest oznaczony dla n=1,2,3... Przeprowadzając rachunki otrzymujemy z (3) wartości kolejnych liczb B_n, to znaczy:

$B_0=1$

$B_1=-\frac{1}{2}$

$B_2=\frac{1}{6}$

$B_3=0$

$B_4=-\frac{1}{30}$

$B_5=0$

$B_6=\frac{1}{42}$

$B_7=0$

$B_8=-\frac{1}{30}$

$B_9=0$

$B_{10}=\frac{5}{66}$

$B_{11}=0$

$B_{12}=-\frac{691}{2730}$

$B_{13}=0$

$B_{14}=\frac{7}{6}$

$B_{15}=0$

$B_{16}=-\frac{3671}{510}$

$B_{17}=0$

$B_{18}=\frac{43867}{798}$

$B_{19}=0$

$B_{20}=\frac{176411}{330}$

Powyższe liczby noszą nazwę liczb Bernoulliego.

Można nadmienić, że B_{120} ma licznik 113-cyfrowy, a mianownikiem jest liczba 2328255930. Natomiast B_{122} ma mianownik równy 6, zaś licznik jest 107-cyfrowy.

Jedną z ciekawszych własności liczb Bernoulliego jest własność

$$B_n=0, \quad \text{dla } n=3,5,7,9...$$

Liczby Bernoulliego posłużyły do określenia wielomianów Bernoulliego.

WIELOMIANY BERNOULLIEGO

Definicja: Wielomianami Bernoulliego nazywamy funkcje określone dla n=0,1,2,3... wzorami:

$$B_n(x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r x^{n-r}, \qquad x\in R. \qquad (4)$$

Wielomiany te można otrzymać jako współczynniki rozwinięcia w szereg według potęg t następującej funkcji

$$f(t,x)=\frac{te^{tx}}{e^t-1}, \qquad x\in R,\ t\in R-\{0\}. \qquad (5)$$

Twierdzenie: Funkcja określona wzorem (5) jest funkcją tworząca dla wielomianów Bernoulliego, tzn.

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Twierdzenie to pozostawiamy bez dowodu.

Wykorzystując otrzymane wcześniej wartości liczb Bernoulliego oraz wzór (4) dostajemy od razu postać kilku pierwszych wielomianów Bernoulliego:

$B_0(x)=1,$

$B_1(x)=x-\frac{1}{2},$

$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$

$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$

$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30,}$

....

określonych dla x$\in R$.

WŁASNOŚCI WIELOMIANÓW BERNOULLIEGO

1. $B_n(0)=B_n$, dla n=1,2,3...
2. $B'_n(x)=nB_{n-1}(x)$, dla n=1,2,3...
3. $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$, dla n=1,2,3...(własność dopełnienia)
4. $B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}B_n\left(x+\frac{s}{m}\right),$ dla n,m=1,2,3...
5. $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$, dla n=1,2,3...
6. $B_n(0)=B_n(1)=0$, dla n=1,2,3...
7. $B_n(x+1)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r(x),$ dla n=1,2,3...

Z rysu historycznego wiadomo, że powstanie liczb i wielomianów Bernoulliego związane jest z wyliczeniem sumy

$1^m+2^m+3^m+...+n^m=\sum_{k=0}^{n}k^m$, n,m$\in N$.

Znajdźmy związek pomiędzy tą sumą a liczbami i wielomianami Bernoulliego..

W tym celu zauważmy, że dla n- tego wielomianu Bernoulliego określonego dla x$\in R$, funkcja pierwotna ma postać:

$$F(x)=\frac{1}{n+1}B_{n+1}(x),\quad x\in R, n=0,1,2,3\,...$$

Istotnie

F'(x)=$\left[\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}\right]' = \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{(n+1)B_n(x)}{(n+1)} = B_n(x)$.

Rozpatrzmy całkę $\int_x^y B_n(t)dt$, gdzie x,y są dowolne i ustalone na czas rozumowania. Całka taka ma sens, bowiem $B_n(t)$ jest funkcją ciągłą dla $t \in R$, więc tym bardziej na przedziale <x,y>. W myśl podstawowego twierdzenia rachunku całkowego ([2],str.106) oraz postaci funkcji pierwotnej dla n-tego wielomianu Bernoulliego otrzymujemy

$$\int_x^y B_n(t)dt = \frac{B_{n+1}(y) - B_{n+1}(x)}{n+1},$$

Jeżeli w ostatniej całce w miejsce y położymy x+1 to powyższy wzór przyjmuje postać

$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = \frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{n+1}, \qquad x \in R,\ n=0,1,2,3...$$

Stąd, a także na mocy własności 5, otrzymujemy:

$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = x^n. \qquad (6)$$

Rozważmy następnie sumę $\sum_{r=0}^{m-1} r^m$, n,m$\in N$ oraz połóżmy we wzorze (6) w miejsce x $\in R$ zmienną r$\in N$.

Otrzymujemy wtedy

$$\sum_{r=0}^{m-1} r^n = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_r^{r+1} B_n(t)dt \right) = \int_0^1 B_n(t)dt + \int_1^2 B_n(t)dt + ... + \int_{m-1}^m B_n(t)dt$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\sum_{r=0}^{m-1} r^n = \int_0^m B_n(t)dt = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n+1}, \qquad r,m \in N.$$

Korzystając z własności 1 otrzymujemy żądany związek

$$\sum_{r=0}^{m-1} r^n = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}}{n+1}, \qquad r,m \in N.$$

Przykład: Wyznacz sumę kwadratów dwudziestu pierwszych liczb naturalnych.

$$\sum_{r=0}^{20} r^2 = \frac{B_3(21) - B_3}{3}$$

Z wcześniejszych rozważań mamy, że $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ oraz $B_3=0$. W rezultacie

$$\sum_{r=0}^{20} r^2 = 2870.$$

Wielomiany Bernoulliego znajdują również zastosowanie we wzorze sumacyjnym Eulera ([4], str.562) oraz do otrzymania rozwiązania równania różnicowego rzędu pierwszego.

Bibliografia

[1] G. Bejtmjen, A. Erdejn, *Wysszije transcjendjentnyje funkcji*, Nauka, Moskwa 1973.

[2] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. II, PWN, Warszawa 1985.

[3] A.O. Gelfond, *Isczisljenije konjecznych raznostjej*, Moskwa 1959.

[4] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.

[5] *Poczet wielkich matematyków*, pod redakcją prof. dr hab. W. Krysickiego,
Nasza Księgarnia, Warszawa 1989.

[6] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*, t. I, PWN, Warszawa 1976.